République tunisienne

Année scolaire : 2022-2023

3ème Maths-Sciences

Exercices

Premier Trimestre

Généralités sur les fonctions

Continuité

Limites et continuité

Limites et comportement asymptotiques

Produit scalaire

Angles orientés

Trigonométrie

Rotaions

Mr : Hamdi Hsin

Exercice N°1 :

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est exacte.

Choisir la réponse exacte

I) La fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{3x}{1+|x|}$

a) est paire ; b) est impaire

c) n'est ni paire ni impaire

II) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2}{|x+1|-|x-1|}$

1) Le domaine de définition de f est :

a) $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$; b) $]-1;1[$; c) $\mathbb{R}^*$

2) La fonction f est :

a) Paire ; b) Impaire ;

c) Ni paire ni impaire

3) L'ensemble de définition de la fonction :

$x \longrightarrow \sqrt{|4-2x|}$ est :

a) $]-\infty,2]$; b) $[2,+\infty[$; c) $\mathbb{R}$

III/ 1) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$

par : $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ alors :

a) 0 est un minimum de f ; b) 1 est un maximum de f ;

c) f est bornée.

2) Si g est une fonction impaire tel que :

$g(-2)=2$ alors :

a) $g(2)=-2$; b) $g(2)=2$;

c) 2 n'admet pas d'image par g

3) La fonction : $x \longrightarrow \frac{x^2-1}{|x-2|-1}$ est définie sur :

a) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$

4) L'ensemble de définition de la fonction

$f : x \mapsto \frac{1}{E(x)-2012}$ est :

a) $\mathbb{R}^*$; b) $\mathbb{R}\setminus\{2012\}$;

c) $]-\infty,2012[\cup[2013,+\infty[$

Exercice N°2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=x^2\sqrt{x-2}$

1) Vérifier que l'ensemble de définition D_f de la fonction f est $[2;+\infty[$

2) Montrer que f croissante sur D_f.

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2,3]$

a) Déterminer un encadrement de $g(x)$.

b) Montrer alors que g est majoré par 9.

c) La fonction g est elle minoré par -1 ? Justifier ?

Exercice N°3 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ paire et admet 5 comme minimum absolu sur $[0,+\infty[$.

1) Déterminer le signe de $f(x)-5$ sur $[0,+\infty[$
2) Déterminer le signe de $f(x)-5$ sur $\mathbb{R}$
3) Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par : $g(x)=\sqrt{f(x)-5}$

Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2}{3}x^2$

1) Étudier f et tracer sa courbe représentative (ζ_f) relativement à un repère orthonormé
2) En déduire la courbe représentative (ζ_g) de la fonction g qui à x associe $-\frac{2}{3}x^2$
3) a) Montrer que la courbe (C_h) de la fonction h définie par $h(x)=3-\frac{2}{3}x^2$ se déduit de (ζ_g) par une translation dont on précisera le vecteur
   b) Déterminer les coordonnées des points communs à (ζ_f) et (ζ_h)
4) a) Tracer la courbe (ζ_k) représentative de la fonction k définie par : $k(x)=\sup(f(x),h(x))$
   b) Déterminer suivant les valeurs du réel m le nombre des solutions de l'équation: $k(x)=m$

Exercice N°5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Démontrer que la fonction f admet un maximum $M=2$

   On pourra déterminer le signe de $[f(x)]^2-4$

Exercice N°6 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-2$

1) Etudier la parité de f
2) Etudier les sens de variation de f sur $]-\infty,0]$ et sur $[0,+\infty[$
3) Tracer la courbe de f
4) Tracer la courbe de (ζ_{-f}) et expliquer comment obtient-on la courbe de (ζ_{-f}) à partir (ζ_f)
5) Soit la fonction $g(x)=x^2+4x+5$
   a) Vérifier que $g(x)=(x+2)^2+1$
   b) Montrer que g est minorée par 1.
   c) Montrer que g admet un minimum en $x_0=-2$.

Exercice N°7 :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x$

1) Montrer que f est impaire.

2) a) Expliciter $f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

3) On pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

   a) Préciser D_g puis étudier les variations de g

   b) Montrer que g est bornée sur $[1, +\infty[$.

4) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x^2}{f(x)}$

   a) Déterminer D_h l'ensemble de définition de h puis étudier la parité de h.

   b) Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est le maximum de h sur D_h.
   Pour quelle valeur est-il atteint ?

   c) En déduire le minimum de h sur D_h

   d) Résoudre alors $E(h(x)) = 0$ et $E(h(x)) = -1$

Exercice N°8 :

Soit la fonction f définie sur $[-2; 2]$ par : $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

1) Etudier la parité de f

2) a) Déterminer le signe de $(f(x))^2 - 4$
   En déduire que f est bornée sur $[-2,2]$

   b) Montrer que 2 est un maximum de f sur $[-2,2]$

   c) En déduire le minimum f sur $[-2,2]$; Justifier

3) a) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$; $f(a) - f(b) = \frac{(a^2-b^2)(4-b^2-a^2)}{a\sqrt{4-a^2}+b\sqrt{4-b^2}}$

   b) En déduire les variations de f sur : $[0, \sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2}, 2]$

   c) En utilisant la parité de f en déduire les variations de f sur $[-2,2]$

4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

   a) Déterminer D_g ensemble de définition de g

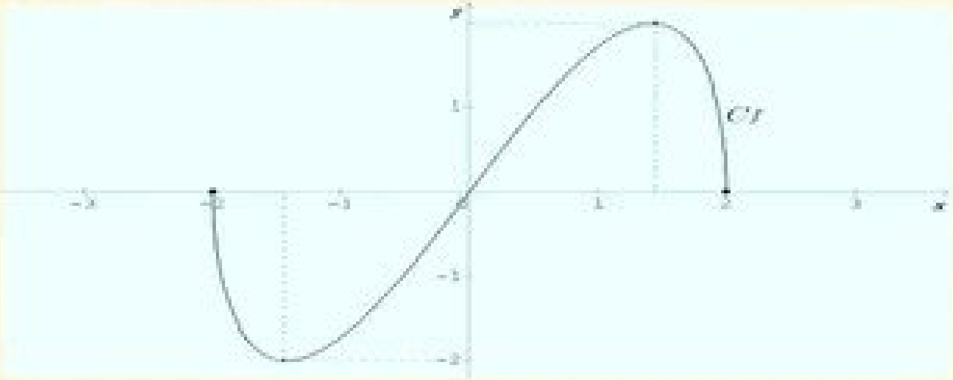
   b) Déterminer les variations de g sur D_g

5) On a représenté ci- dessous la courbe de f

   a) Déduire la construction des courbes des fonctions h, k définies sur $\mathbb{R}$ par :

   $h(x) = |f(x)|$ $\qquad$ $k(x) = f(-x)$

   b) Etudier graphiquement la parité de h et k



Exercice N°9 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

1) a) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $2|x|\leq x^2+1$

b) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$

c) Déterminer les extremums de f

2) Soient a et b deux réels distincts

a) Montrer que : $f(a)-f(b)=\frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$

b) En déduire les variations de f sur $[0,1]$ et sur $[1;+\infty[$

3) Soit g la fonction définie par : $f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

a) vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $g(x)=f(x)+1$

b) Expliquer la construction de la courbe de g à partir de la courbe de f

Exercice N°10 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{a+|x|}{b|x|+2}$

1) Déterminer a et b pour que (ζ_f) passe par les points $A(4,-4)$ et $B(1,5)$

2) a) Pour les valeurs trouvées dans 1) déterminer D_f

b) Etudier la parité de f

3) Soit g la fonction définie par : $g(x)=x\sqrt{f(x)}$

Déterminer D_g, puis étudier la parité de g

Exercice N°11 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+1}-|x|+2x$

1) a) Montrer que f est une fonction affine par intervalles

b) Tracer (ζ_f), courbe représentation graphique de f dans un repère orthonormé

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x)=-x^2+1$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=g(x)$

b) Tracer (ζ_g), courbe représentation graphique de f dans le même repère

c) Résoudre graphiquement l'équation :

$x^2+x-1=|x|-|x-1|-x$

3) On donne $\forall x\in]-1,+\infty[$; $h(x)=\begin{cases}1+\frac{x^2-xE(x)}{x+1} & si\ \ x\leq 0\\ f(x) & si\ x>0\end{cases}$

Montrer que h est une fonction affine par intervalles

Exercice N°12 :

Soit F la fonction définie par : $F:x\mapsto\sqrt{3-2x-x^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D de F

2) Montrer que F est décroissante sur $[-1,1]$

3) Prouver que F admet un maximum M et un minimum m sur $[-3,1]$ que l'on déterminera.

4) U et V deux fonctions définies sur $[-1,1]$ par :

$$\begin{cases} U(x) = \frac{1}{2}(F(x) + F(-x)) \\ V(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(-x)) \end{cases}$$

Montrer que U est paire et que V est impaire

Exercice N°13 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Montrer que f est paire

2) a) Montrer que. pour tout $x \neq 0, on\ a : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$

b) En déduire que f est bornées sur D_f

c) Déterminer le sens de variation de f sur $]0,+\infty[$

d) En déduire les variations de f sur $]-\infty;0[$

3) Soit g une fonction définie par : $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}-2}{x}$

a) Montrer que : $(\forall x > 0)$; $g(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} + \frac{2}{1+\sqrt{2x+1}}$

b) Montrer que g est décroissante sur $]0,+\infty[$

Exercice N°14 :

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) a) Montrer que f est minorée par 2

b) Déduire que $f(x)$ admet un minimum à préciser

c) Montrer que : pour tous réels strictement positifs a et b : $f(a) - f(b) = \frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$

d) Déduire les variations de f sur les intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

a) Montrer que g admet un minimum relatif sur $]0,+\infty[$ à préciser

b) Etudier les variations de f sur les intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$

Exercice N°15 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$

1) a) Etudier la parité de f

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$

En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_-$

c) En déduire que f admet un minimum

d) Tracer (ζ_f)

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

a) Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de g. Vérifier ce résultat par le calcul

b) Etudier la parité de g

c) Etudier les variations de g sur $[2,+\infty[$

d) Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < g\left(2 + \frac{1}{n+1}\right) < g\left(2 + \frac{1}{n}\right) \leq \sqrt{5}$

e) Résoudre $E(g(x)) = 0$

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = x^3 - 3x$

a) Etudier la parité de h

b) Etudier les variations de h sur $[-1,0]$ et sur $]-\infty,-1]$

Exercice N°16 :

On donne : $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2 - 2 & si\ x \geq 0 \\ (x+3)^2 - 2 & si\ x \leq 0 \end{cases}$; $x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que f est paire.

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; on a : $f(x) \geq -2$

3) Etudier les variations de f sur $[0,3]$ puis sur $[3,+\infty[$

Tracer la courbe (ζ_f) de f

Exercice N°17 :

1) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 6$

a) Déterminer les variations de f sur $]-\infty,1]$ et sur $[1,+\infty[$.

b) Construire ζ_f dans un repère orthonormé

2) Soit g la fonction sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = -\sqrt{x}$

a) Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}_+$

b) Soit A le point de (ζ_f) d'abscisse 4

Vérifier que $A \in (\zeta_g)$

c) Construire alors (ζ_g)et résoudre graphiquement :

$-x^2 + 2x + \sqrt{x} > -6$

3) Soit $h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x))$; $x \geq 1$

a) Déterminer les variations de h sur D_h.

b) Donner l'allure de (ζ_h)

Exercice N°18 :

On donne : $f(x) = \begin{cases} -x + 1\ si\ x \in\ ]-\infty,-1[\\ xE(x) - 1\ si\ [-1,2] \\ -x + 4\ si\ x \in\ ]2,+\infty[\end{cases}$; $x \in \mathbb{R}$

1) Montrer que f est une fonction affine par intervalle

2) Représenter f dans un ron $(O,\vec{i},\vec{j})$

3) a) Résoudre graphiquement : $f(x) + 1 = 0$

b) Résoudre graphiquement : $f(x) - |x| + 1 \geq 0$

4) Trouver l'expression de g définie par :

- Si $x \in\ ]-\infty,2]$ alors $(\zeta_g) = t_{-2\vec{j}}(\zeta_f)$
- Si $x \in\ ]2,+\infty[$ alors $(\zeta_g) = [AB]$ tel que : $A(2,-1)$, $B(4,0)$.

Exercice N°19 :

On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ et tels que : $g(x) = 2f(-x) + f(x) = 2x^4 - x^2$

1) Montrer que g est paire et en déduire que f est paire

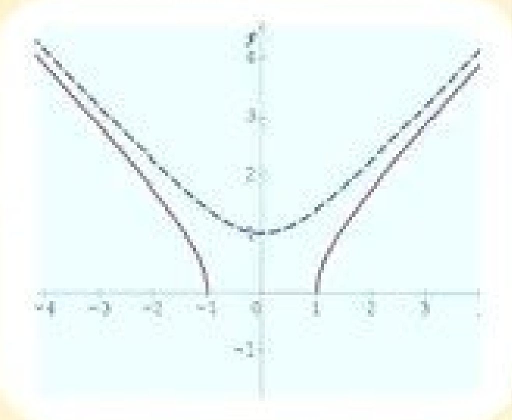
2) Déduire l'expression de $f(x)$

Exercice N°20 :

f et g les fonctions définies par :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$; $g(x) = \sqrt{x^2-1}$ et la droite $\Delta : y = x$

1) Identifier (ζ_f) et (ζ_g) sur le graphique ci suit :



2) Etudier la parité des fonctions f et g

3) a) Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(x',y') = S_\Delta(M)$

Exprimer x' et y' en fonction de x et y

b) Montrer que les restrictions de (ζ_f) et (ζ_g) sur $\mathbb{R}_+$ sont symétriques par rapport à Δ

c) En déduire que les restrictions de (ζ_f) et (ζ_g) sur $\mathbb{R}_*$ sont symétriques par rapport à une droite Δ' que l'on précisera

Exercice N°21 :

1) Montrer que la fonction $u(x) = \frac{3x^2+5}{2x^2+1}$ est minorée par $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$

2) Montrer que la fonction $v(x) = \frac{5x}{4x+8}$ est majorée par $\frac{5}{4}$ sur $]-2, +\infty[$

3) Déterminer un majorant et un minorant de la fonction donnée sur l'intervalle I dans les cas suivants :

a) $f_1(x) = x^3 - 2x + 3$; $I = [0,3]$

b) $f_2(x) = x^2 + 6x + 5$; $I = [-5,0]$

c) $f_3(x) = \frac{-3}{x-1}$; $I = [2, +\infty[$ d) $f_4(x) = \frac{2}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$

4) Majorer et minorer les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ sur $[1, +\infty[$

c) $h(x) = \frac{1}{2-\cos x}$ sur $[0, \pi]$

Exercice N°22 :

Soit la fonction telle que $f(x) = x^2 - 12x$

1) Etudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer $(\zeta_f) \cap (Ox)$ et $(\zeta_f) \cap (Oy)$

3) Montrer que f est bornée sur $[0,2]$

Exercice N°23 :

1) E étant la fonction partie entière ; montrer que pour tout réel y on a : $y - 1 < E(y) \leq y$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit la fonction f_n définie sur $\left[\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right[$ par : $f_n(x) = 1 - xE(x)$

Déterminer suivant n, la fonction f_n

Exercice N°1 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - x + 1$

1) a) Montrer qui est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

b) Montrer que g est continue sur $]0;+\infty[$

2) a) Montrer que la fonction $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1,2[$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude $0,25$ prés

c) Vérifier que $\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$.

3) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$

4) Donner le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$

Exercice N°2 :

Soit la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x & si\ x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x+3} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Montrer que la fonction f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty;1[$ *et* $[1;+\infty[$.

3) a) Tracer la courbe ζ_f courbe représentative de la fonction f dans un rond $(O;\vec{i},\vec{j})$.

b) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer les images par f des intervalles

4) Soit $g : x \longrightarrow \sqrt{x+3} - x$

a) Montrer que g est continue sur $[2,3]$.

b) Montrer que la fonction $f(x) = x$ admet au moins une solution γ dans $[2,3]$

c) Donner une valeur approchée par défaut de γ à 10^{-1} prés

d) Vérifier que $\gamma^2 - \gamma - 3 = 0$.

e) Donner la valeur exacte de γ

Exercice N°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si\ 0 < x < 1 \\ x - 1 & si \quad 1 \leq x \end{cases}$$

1) Tracer (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

2) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty,0]$; $]0,1[$ et $[1;+\infty[$.

3) f est-elle continue en 1 ? en 0 ?

4) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

5) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = 1$ puis $f(x) = -1$

Exercice N°4 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Montrer que f est impaire

2) Soit g la restriction de f sur $[1;+\infty[$

a) Montrer que $g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

b) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$; $on a : 1 \leq g(x) \leq \sqrt{2}$

3) a) Montrer que g est continue sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que g est décroissante sur $[1;+\infty[$

c) En déduire $g < [1;2] >$

4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]1;2[$

5) a) Montrer que α est une solution de l'équation :

$x^4 - x^2 - 1 = 0$

b) Donner alors la valeur exacte de α

Exercice N°5 :

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

a) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]1; 2[$.

b) Vérifier que : $\alpha = \frac{\alpha^2+2}{\alpha^2+1}$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la parité de la fonction f.

c) Montrer que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

d) En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty;0]$.

3) Détermine, en justifiant, les images par f des intervalles : $[1;3]$, $[-3;-1]$ et $[-1;1]$

Exercice N°6 :

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$; $\sqrt{x^2+1} + x > 0$

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} - 2x$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

c) Montrer que f est décroissante sur $[0;1]$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $x_0 \in [0;1]$

b) Donner un encadrement de x_0 à 10^{-1} près

4) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in [0;1]$

Exercice N°7 :

On donne : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)^2 - 3 & si\ x \geq -1 \\ |x| - 2|x-2| & si\ x \in]-1,3[\\ 1 + \sqrt{x-3} & si\ x \geq 3 \end{cases}$; x réel

1) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$; $]-1;3[$ et $[3;+\infty[$

2) a) Tracer dans la courbe représentative de la fonction f

b) A l'aide du graphique, f est-elle continue en -1

c) Déterminer graphiquement par f l'image de chacun des intervalles : $I =]-2;2[$; $J = [-3;0]$ et $K = [0;+\infty[$

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-1;3[$

Est-ce que g est minorée ? g admet-elle un minimum

Exercice N°8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \geq 1 \\ x^2 - 1 & si\ x \in]-2,-1[\\ x + 1 & si\ \ x \leq 2 \end{cases}$$

1) a) Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$; $]-1;3[$ et $[3;+\infty[$

b) Tracer dans $\mathbb{R}$ la courbe représentative de f

c) Préciser l'ensemble de continuité de f

2) Le nombre 3 est-il majorant de f ? est-il maximum de f

3) En utilisant le graphique :

a) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $E_m : f(x) = m$

b) Préciser le sens de variation de f

c) Calculer $E(f(x))$ pour tout $x \in [-1;1]$

Où E est la fonction partie entière

d) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes

$G : x \mapsto \sqrt{f(2x)}$ et $H : x \mapsto \frac{1}{E(f(x))}$

Exercice N°9 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{|x|}}$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f

b) Vérifier que f est paire

2) Montrer que f est continue sur D_f

a) Montrer que f est croissante sur $]0;1]$

b) En déduire le sens de variation de f sur $[-1,0[$

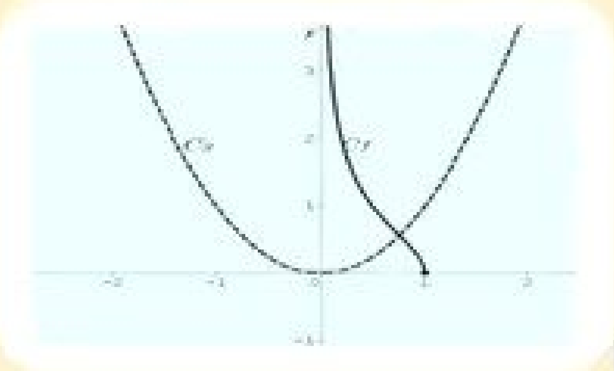
c) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$ et $f\left(\left[-1;-\frac{1}{2}\right]\right)$

d) Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet une unique solution α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$

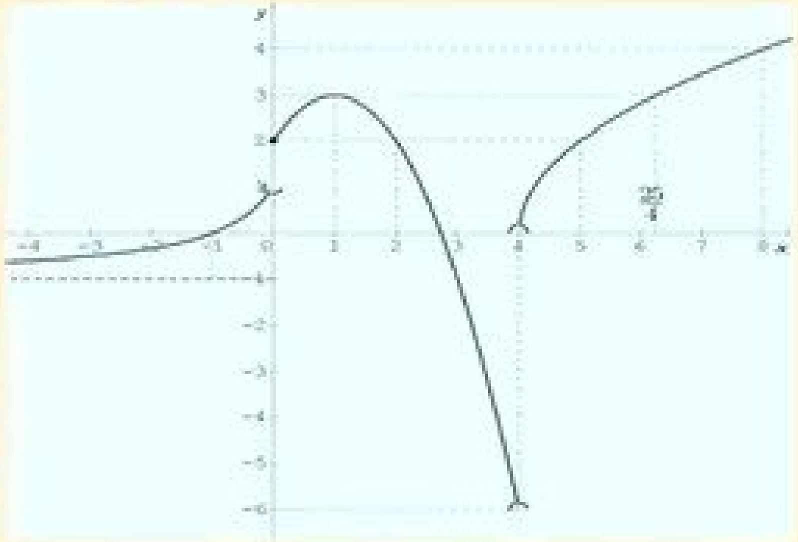
3) On donne ci-dessous une partie de la courbe C_f de la fonction f (en gras) et la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto x^2$ (en pointillée)

a) Compléter la courbe C_f

b) Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h définie sur $]0;1]$ par : $h(x) = f(x) + g(x)$



Exercice N°10 :



I) On a représenté dans la figure ci-avant ζ_f , courbe représentative d'une fonction f définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

1) a) f admet elle un majorant ? un minorant ? sur $\mathbb{R}$

b) Déterminer le maximum de f sur $[0,3]$

2) f est t- elle continue en 0 ? justifier

3) a) Peut – on parler de la continuité de f en 4 ? Justifier.

b) Déterminer les intervalles sur les quelles f est continue.

c) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[2;3]$.

d) Déterminer $f <]-\infty;0[>$; $f <]-\infty;4[>$ et $f < [0;1] >$

4) Déterminer les variations de f sur D

5) Résoudre $E(f(x)) = 2$. $E(f(x)) = 3$

Où E désigne la fonction partie entière.

II) On admet que la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} -\frac{x+1}{x-1} & si\ x < 0 \\ -x^2 + ax + b & si\ 0 \le x < 4 \\ 2\sqrt{x-4} & si\ x > 4 \end{cases}$$

1) Déterminer les réels a et b

2) Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles suivants : $]-\infty;0[$; $[0;4[$ et $]4;+\infty[$

III) On donne la fonction h définie par $h(x) = f(|x|)$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h

2) Montrer que la fonction g est paire.

3) Construire ζ_h courbe représentative de la fonction h

IV) On considère la fonction k définie par $k(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $k(x)$.

2) Déterminer les variations de la fonction k sur l'intervalle $[1;2]$.

Exercice N°1 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de la fonction f en a :

a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $(a = 0)$

b) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1+x} - 2 & si\ x \neq 3 \\ f(3) = 1 \end{cases}$; $a = 3$

c) $\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt{x} & si\ x > 0 \\ f(x) = -1 - \sqrt{-x} & si\ x < 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; $a = 3$

d) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2-(x-1)^4}}{x-1} & si\ x \in]1;2] \\ f(x) = |x| & si\ x \in]-\infty;\ 1] \end{cases}$; $(a = 1)$

Exercice N°2 :

Dans chacun des cas suivants étudier la continuité de f sur son domaine de définition :

a) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & si\ x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{-|x|^3+x^2}{x+1} & si\ x < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-1} & si\ x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty] \\ f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x^3} & si\ x \in [-1;1[\end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x^2+x}{x^2-1} & si\ x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty] \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1} & si\ x \in [-1;1[\\ f(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Exercice N°3 :

Dans chacun des cas suivants la fonction f est elle prolongeable par continuité en x_0 ?
Si oui, définir ce prolongement.

a) $f : x \longmapsto \dfrac{|x|-3}{x^2+3x}$; $x_0 = -3$

b) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x+|x|}$; $x_0 = 0$

c) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; $x_0 = 1$

d) $f : x \longmapsto \dfrac{8x^3-1}{x-|x-1|}$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$

Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2} & si\ x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2-3x+2} & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue en 1

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & si\ x \neq 3 \\ f(3) = a & (a\ réel) \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit continue en 3.

Exercice N°6 :

On considère la fonction f définie par $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Montrer que f est continue en tout réel non nul
3) a) Montrer que pour tout réel x non nul :
   $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}-x+1}$
   b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0

Exercice N°7 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}-2x-1}{x-x^2} & si\ x \neq 1 \\ f(3) = m & (m\ réel) \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f
2) Déterminer m pour que f soit continue en 0
3) Donner alors suivant les valeurs de m, l'ensemble de continuité de f
4) Etudier la continuité de $g(x) = (x-1)^2.f(x)$ en 1

Exercice N°8 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Peut-on-parler de la continuité de f en 0 ?
3) Vérifier que f est continue à droite en 1 et continue à gauche en (-1)

Exercice N°9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$

par : $\begin{cases} f(x) = -1 + \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\ x < 0 \\ f(x) = 1 + \frac{x^2+3x}{x+1} & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0
2) Soit g la fonction définie par $g(x) = |x|.f(x)$
   Montrer que g est continue en 0

Exercice N°10 :

Soit la fonction définie

par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} + ax & si\ x \leq -2\ (a\ paramètre\ réel) \\ f(x) = \frac{x+1}{x} & si -2 < x \leq 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} & si\ x > 2 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Montrer que f est continue en 2
3) Déterminer le réel a pour que f soit continue en -2.

Exercice N°11 :

On donne le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

1) Déterminer $f\left(\left[\frac{-1}{3};1\right]\right)$ et $f(]-\infty;1])$

2) a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [1;2]$ tq $f(\alpha) = 0$

   b) Vérifier que $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - \alpha - 1$

3) Montrer que pour tout réel x, on a :

   $f(x) = (x-\alpha)\left[x^2 + (\alpha - 1)x + \frac{1}{\alpha}\right]$

4) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$ par :

   $h(x) = \frac{x^3-x^2-x-1}{x-\alpha}$

   Montrer que h est prolongeable par continuité en α et déterminer ce prolongement

Exercice N°12 :

I) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{2}$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[0,1]$

II) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ x \leq 0 \\ g(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}+x-1}{x} & si\ 0 < x \leq 2 \\ g(x) = (a^2 - a)x - 2 & si\ x > 2 \end{cases}$$;Où a paramètre réel

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0;2]$ on a :

$$g(x) = \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}+x-1}$$

b) Etudier la fonction g en 0.

2) Déterminer les valeurs du paramètre a pour les quelles la fonction g est continue en 2

3) Sachant que $a = -1$

a) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

b) En déduire que la fonction $h: x \mapsto |x|g(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice N°13 :

A) On considère la fonction φ définie par :
$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ

a) Vérifier que φ est une fonction paire

b) Montrer que pour tout $x \neq 0$; $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})$

c) En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ admet au moins deux solutions dans $]-1,1[$

B) Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & si\ x \in [-1;0[\\ \frac{x^2+m^2}{x+1} & si\ x \in [0,1] \\ \frac{x^2+x-2}{x-1} & si\ x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

1) Déterminer m pour que f soit continue en 0.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

3) Montrons que si f est continue en 0 alors f est discontinue en 1

4) Discuter suivant les valeurs de m la continuité de la fonction f sur $[-1,+\infty[$

Exercice N°14 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{2(x+1)} & si\ x < -1 \\ (m-1)x^3 + (5-m^2)x + 1 & si\ -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{4(\sqrt{x+4}-2)} & si\ x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout réel m, f est continue en 0

2) Déterminer les valeurs de m pour que f soit continue en -1

Dans la suite on prend $m = 2$

1) a) Montrons que f est strictement croissante sur $[-1;0]$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1;0]$ une seule solution α

c) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

d) Vérifier que $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} = -1$

e) Montrer que $\forall x \in [-1;0]$ on a : $f(x) = (x-\alpha)\left(x^2 + \alpha x - \frac{1}{\alpha}\right)$

I) Soit g la fonction définie sur $[-1;0]\backslash\{\alpha\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^3+x+1}{x-\alpha}$$

Montrer que g est prolongeable par continuité en α puis déterminer son prolongement

Exercice N°15 :

I) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-2x}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f

b) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition

2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2 et définir son prolongement.

II) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} & si\ x \geq 1 \\ \frac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} & si\ x < 1 \end{cases}$$

1) Justifier la continuité de g en $a = 2$, $b = 0$, sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

2) a) Montrer que g est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

b) Déduire que g est majorée sur $[1;+\infty[$

3) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0;1]$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 0,5

c) Donner le signe de g sur $\mathbb{R}$

d) Vérifier que $\alpha^3 - 5\alpha^2 + 8\alpha - 3 = 0$

Exercice N°16 :

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x - 1 & si\ x \leq 1 \\ (x-3)E(x) + \frac{1}{4} & si\quad 1 < x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & si\ x > 3 \end{cases}$$

1) a) Montrer que $\forall x \leq 1$. on a : $f(x) + \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

b) En déduire que f est majorée sur $]-\infty;1]$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

b) f est-elle continue en 3

3) Etudier la continuité de f en 1

B) *Soit* g *la fonction définie sur* $]-\infty;1]$ *par :*

$$g(x) = 2x^3 + f(x)$$

1) *Montrer que* g *est continue sur* $]-\infty;1]$

2) a) *Soit deux réels de l'intervalle* $]-\infty;1]$.

Montrer que :

$$g(b) - g(a) = (b-a)\left[(b+a)^2 + \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

b) *En déduire que* g *est strictement décroissante sur* $]-\infty;1]$

3) a) *Montrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une solution unique* α *dans* $]0;1[$

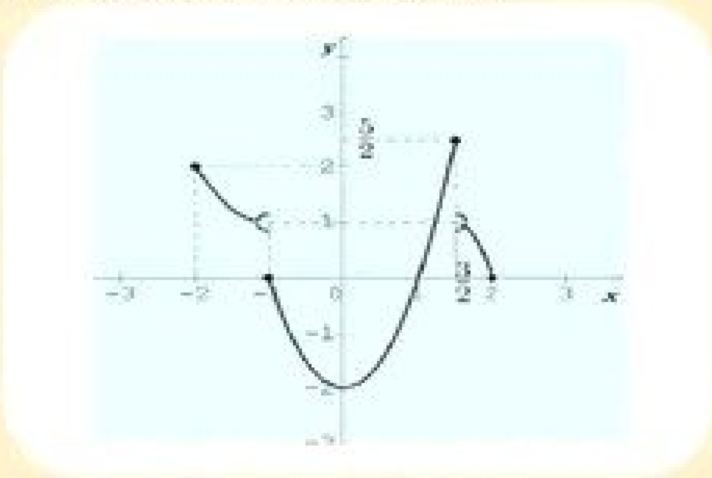
b) *En déduire que* α *est l'unique solution de l'équation* $g(x) = 0$ *sur* $]-\infty;1]$

c) *Montrer que* $\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = 2$

d) *Donner le signe de* $g(x)$ *sur* $]-\infty;1]$

Exercice N°17 :

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g *définie sur* $[-2,2]$



1) *Déterminer graphiquement :*

a) $g\left(\frac{3}{2}\right)$; $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$

b) $g([-2;2])$; $g([-2;0[)$; $g([-2;1[)$ *et* $g([-1;2[)$

c) $g(x) = 0$

d) *Le nombre des solutions de l'équation :* $g(x) = m$; *où* m *paramètre réel*

2) *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

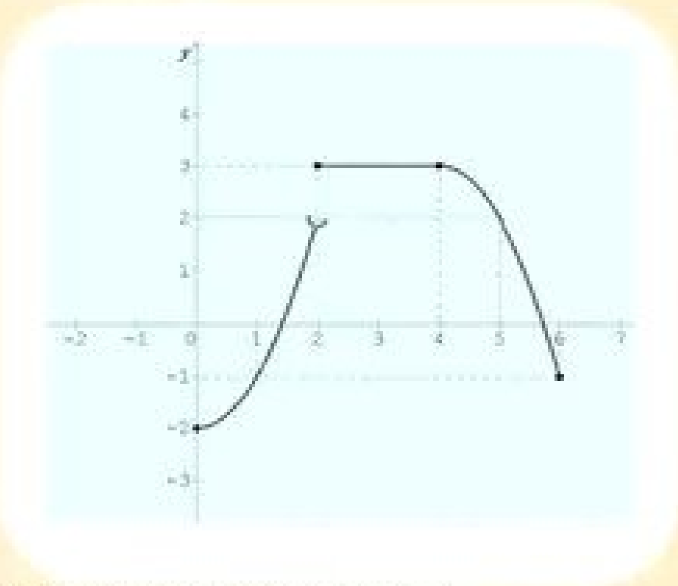
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+4x}{2x^2+4} & si\ x < -2 \\ g(x) & si\ -2 \le x \le 2 \\ \frac{\sqrt{5x-1}-3}{x-2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

a) *Montrer que* f *est continue sur* $]-\infty;-2[$ *et sur* $]2;+\infty[$

b) *Etudier la continuité de* f *en* -2 *et en* 2

Exercice N°18 :

La figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f



1) *Déterminer graphiquement :*

a) D_f *: ensemble de définition de la fonction* f

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

c) *Les intervalles où* f *est continue*

d) $f([0,2])$ *et* $f([1,4])$

2) *Résoudre graphiquement l'inéquation :*

$-2 < f(x) < 2$ *et* $-1 < f(x) < 3$

3) *Soit* h *la fonction définie par :*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{10x^2-6x+1}-1}{x} & si\ x < 0 \\ f(x) & si\ 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{2x^2-13x+6}{x^2-5x-6} + 1 & si\ x > 6 \end{cases}$$

a) *Montrer que* h *est continue sur* $]-\infty;0[$ *et sur* $]6;+\infty[$

b) *Montrer que pour tout* $x < 0$ *; on a :*

$$h(x) = \frac{10x-6}{\sqrt{10x^2-6x+1}+1}$$

c) *Etudier la continuité de* h *en* 0 *et en* 6

Exercice N°1 :

A) Soit h la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x^2-3} - x + 1$

On désigne par (ζ_h) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de h

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x}$

4) Montrer que la droite d'équation $y = -2x+1$ est une asymptote oblique à (ζ_h)

B) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = xE(x) - E(x)$

1) Soit k un entier, déterminer l'expression de $g(x)$ pour $x \in [k;k+1[$ Puis pour $x \in [k-1;k[$

2) Déterminer s'il existe, la valeur de k pour que g soit continue en k

3) Tracer la représentation graphique de la restriction de g sur $[-1;2[$

C) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x-3}{x^2-1} & si\ x < -1 \\ g(x) & si\ -1 \le x < 2 \\ \frac{h(x)}{x-2} & si\ x > 2 \\ f(2) = 1 & \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en (-1).

2) Etudier la continuité de f en 2.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution β dans l'intervalle $]-2;-1[$

b) Montrer que β est une solution de l'équation $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

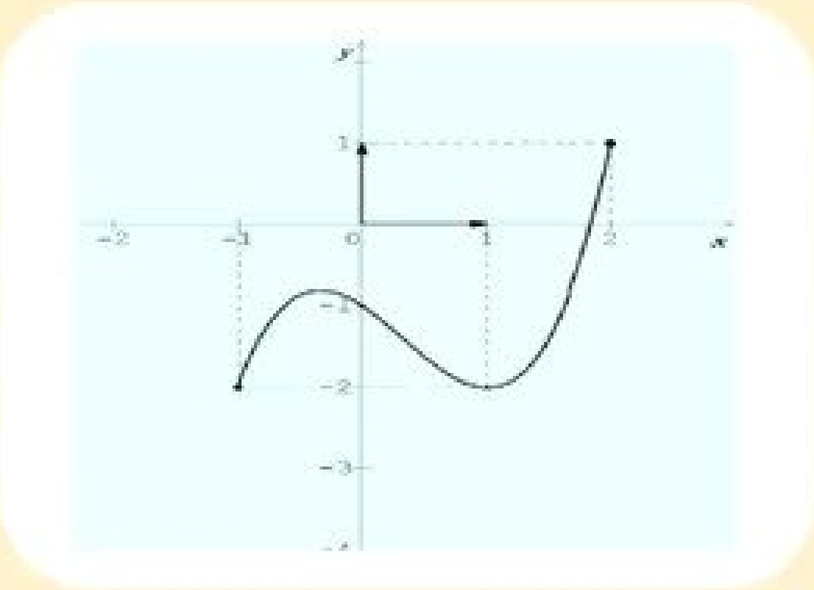
c) En déduire la valeur exacte de β.

4) Montrer que la droite d'équation $y = -2x+1$ est une asymptote oblique à (ζ_h)

Exercice N°2 :

A) On donne (ζ_g) courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-1;2]$ par :

$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où a ; b et c trois réels.



Par lecture graphique :

1) Déterminer : $g(]-1;2])$

2) Le nombre des solutions de chacune des équations :

$g(x) = 0$ et $g(x) = -1$

3) Les réels a ; b et c

4) Soit α la solution de l'équation $g(x) = 0$

Donner un encadrement de α d'amplitude $0,5$

B) Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2} & si\ x < -1 \\ g(x) & si\ -1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x^2-x+2}+mx & si\ x > 2 \end{cases}.$$

(ζ_f) sa courbe représentative dans un ron $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f

2) Montrer que f est continue en -1

3) Déterminer le réel m pour que f soit continue en 2

C) Dans la suite on prend $m = -\frac{1}{2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat

2) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$; on a :

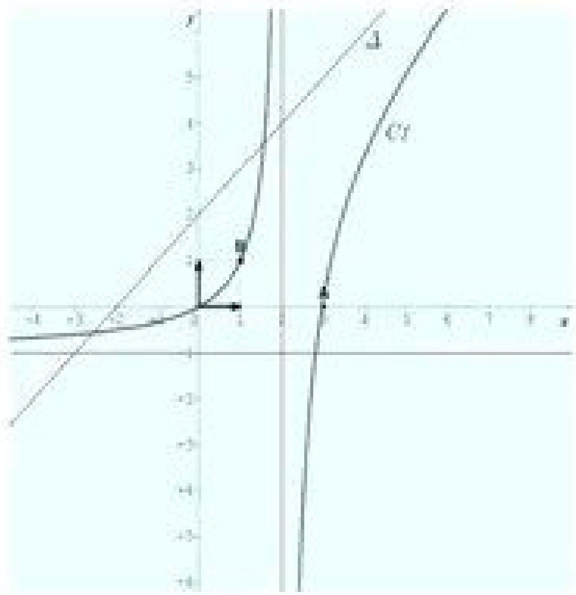
$$\sqrt{x^2-x+2} - x = \frac{\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2} - x\right)$

Exercice N°3 :

On donne sur le graphique ci-dessous ζ_f la courbe représentative d'une fonction : f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

* On admet que $\Delta: y = x+2$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $+\infty$.
* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $-\infty$.
* ζ_f passe par les points : $O(0;0)$; $B(1;1)$ et $A(3;0)$



1) Par lecture graphique, déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x-2)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-3x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x-2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-\sqrt{x^2+1}\right)$.

2) Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de g noté D_g

b) On pose pour tout $x \in D_g\backslash\{1\}$, $h(x)=\frac{g(x)-1}{f(x)-1}$

Montrer que pour tout $x \in D_g\backslash\{1\}$, $h(x)=\frac{-g(x)}{\sqrt{f(x)+1}}$

c) En déduire que h est prolongeable par continuité en 1, définir son prolongement.

Exercice N°4 :

Soit a et b deux réels et la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{(a+3)x^2+3x-2a}{x+2} & si\ x<-1\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+b & si -1\le x\le 2\\ \sqrt{4x^2-6x}+bx & si\ x>2\end{cases}$$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les réels a et b pour que f soit continue en (-1) et en 2

3) Pour $b=-\frac{3}{2}$, montrer que ζ_f admet une asymptote Δ d'équation : $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ au $(v_{+\infty})$

4) Pour $a=1$ montrer que ζ_f admet une asymptote Δ' d'équation : $y=4x-5$ au $(v_{-\infty})$

Exercice N°5 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-x}$,

(C_f) sa courbe représentative dans un ron $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) Déterminer D_f

2) a) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

b) Montrer que : $\forall x \in D_f$; on a : $f(x)=x+1+\frac{1}{x}$

c) i) Calculer :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - (x+1)\right) \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x+1)\right)$$

ii) Etudier la limite de f au voisinage de 0

iii) Déterminer alors toutes les asymptotes qu'on admet (C_f)

iv) f est-elle prolongeable par continuité en 1

3) Montrer que l'équation $f(x) = x^2$ admet dans $[\sqrt{2}; 2]$ au moins une solution α

4) Soit la fonction g définie par :

$g(x) = f(x) + ax + b$ où a et b sont deux réels

Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g admette au voisinage de $(+\infty)$ la droite $\Delta : y = 2$ comme asymptote horizontale

5) Soit h la fonction définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{f(x)} + 1 & si\ x \geq \alpha \\ \frac{x^3+1}{g(x)} & si\ x < \alpha \end{cases} \text{ ; (α donnée dans 3)}$$

Montrer que h est continue en α

Exercice N°1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x - 6)$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+8}{x^3-x-6}$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+8}{x^3-x-6}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3x^2 + x} - 2x$;

6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 - 2} - 2x$

7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 3} + x + 2$

8) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1}$

9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}$;

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{x+1}$;

13) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^3-x-6}$;

14) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$;

15) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

16) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

Exercice N°1 :

Les questions : I) II) III) et Iv) sont indépendantes

I) ABC étant un triangle isocèle en A avec $BC = 4$

I milieu du segment $[BC]$

$ABIJ$ étant un parallélogramme

Calculer :

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{JA}$; $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{BI}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CI}$

II) $ABCD$ un trapèze isocèle de bases $[AB]$ et $[CD]$

tel que $AB = 3$ et $DC = 7$

Calculer :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

III) Soit $ABCD$ un carré

I le milieu de $[AB]$; J le milieu de $[AD]$

K le milieu de $[ID]$

Montrer que les droites (AK) et (BJ) sont perpendiculaires.

IV) On considère un triangle ABC rectangle en A

H le pied de la hauteur issue de A

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH^2 - HB.HC$

2) En déduire que : $AH^2 = HB.HC$

Exercice N°2 :

Soient A et B deux points du plan, g L'application du plan dans lui-même, définie par : $g(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

1) Déterminer l'ensemble des points M du plan

tels que : $g(M) = 0$

2) Soit I le milieu de $[AB]$

a) Montrer que : $g(M) = IM^2 - IA^2$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan

tel que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 12$

3) Retrouver le résultat de 2.b) avec $A(-1,2)$ et $B(1,0)$

Exercice N°3 :

I) On considère un repère orthonormé du plan et

les points $A(3,-5)$ et $B(1,4)$

1) Déterminer une mesure de l'angle $A\hat{O}B$.

2) Ecrire une équation du cercle de centre A et

tangent à la droite $\Delta : 4x + 3y - 2 = 0$

II) Soit $ABCD$ un carré avec :

$I = A * B$; $J = A * D$ et $K = I * D$

Montrer que $(AK) \perp (BJ)$

III) Soit I milieu de $[AB]$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

b) Déduire l'ensemble : $E = \left\{M \in P / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2\right\}$.

2) Montrer que $\forall M \in P$. on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Exercice N°4 :

$ABCD$ un carré tel que $AB = 3$. E le symétrique de C par rapport à B.

J le point du $[DC]$ tel que $CJ = 1$

K le point de $[BE]$ tel que $EK = CJ$

1) a) Calculer : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}.\overrightarrow{AK}$

b) En déduire que $(AJ) \perp (AK)$

2) Calculer $\cos(\widehat{DKJ})$ et en déduire $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{KD}$.

3) a) Soit I le milieu de $[JK]$. Calculer DI.

b) Soit $\xi = \{M, M \in P \text{ tel que: } 2\overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK} = 6\}$

Montrer que ξ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Construire ζ

c) Soit $D' = S_I(D)$: Montrer que $\overrightarrow{KD'}.\overrightarrow{KD} = -6$

Exercice N°5 :

Soient A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment $[AB]$

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

b) En déduire l'ensemble $E = \left\{M \in P / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2\right\}$

2) Soit l'ensemble : $F = \left\{ M \in P / \frac{MA}{MB} = 2\right\}$

Soit $G = \text{bary}[(A, 1); (B, -4)]$

a) Montrer que : $MA^2 - 4MB^2 = -3MG^2 + GA^2 - 4GB^2$

b) Montrer que : F est l'ensemble des points $M \in P$. tel que : $MG^2 = \frac{1}{3}(GA^2 - 4GB^2)$

c) En déduire que F est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon. Soit $(AB = 2)$

3) Montrer que : $\forall M \in P$; $MA^2 + MB^2 = 2IM^2 + \frac{AB^2}{2}$

4) Montrer que : $\forall M \in P$; $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

Exercice N°6 :

Soit ABC un triangle tel que :

$AB = 4$; $AC = 6$ $BC = 8$ et I le milieu de $[BC]$

1) a) Montrer que : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b) Calculer alors la distance AI

2) a) Placer le point H de à la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = -8$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -8$

3) Soit G le centre de la gravité du triangle ABC

Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MC} = 0$

4) a) Montrer que G est le barycentre des points pondérées : $(A,1)$ et $(I,2)$.

b) Montrer que pour tout point M du plan

On a : $MA^2 + 2MI^2 = 3MG^2 + \frac{20}{3}$

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + 2MI^2 = \frac{29}{3}$

Exercice N°7 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle AIC isocèle rectangle en C et de sens direct

On donne $AI = 4$ cm

Soit B le symétrique de A par rapport à I et H le projeté orthogonale de B sur (AC)

1) a) Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

b) Calculer CI et CB

c) Montrer que $\cos(\widehat{BCI}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan suivant :

a) $E = \{M \in P \,/\, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0\}$

b) $F = \{M \in P \,/\, MA^2 + 3MB^2 = 64\}$

3) Le plan est muni du repère $(C;\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI})$

a) Calculer les coordonnées du point B

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite de la droite (BC)

c) En déduire la distance du point I à la droite (BC)

Exercice N°8 :

I) A et B deux points du plan tels que :

$AB = 2$ et $I = A * B$

1) Montrer que l'ensemble des points M du plan tel que : $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB} = 0$ est la médiatrice du segment $[AB]$

2) Déterminer et construire l'ensemble suivant

$$E = \{M;\ M \in P\ /\ 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB}\}$$

$$F = \{M;\ M \in P\ /\ 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - MB^2 = 0\}$$

$$G = \{M;\ M \in P\ /\ 2MA^2 - MB^2 = 8\}$$

On suppose dans la suite que : $AB = 4$

II) Déterminer et construire chacune des ensembles :

$A = \{M \in P / \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 24\}$; $B = \{M \in P / \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -8\}$

$C = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 40\}$; $D = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = 24\}$

$K = \{M \in P / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 12\}$

Exercice N°9 :

Soit ABC un triangle isocèle tel que :

$AB = AC = 5$ et $BC = 4$

Soit : H le projeté orthogonal de A sur (BC)

Et K le milieu de $[AC]$

1) Calculer : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, puis en déduire $\cos \widehat{ABC}$

2) Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

3) Montrer que : $BA^2 + BC^2 = 2\,BK^2 + \frac{AC^2}{2}$

En déduire BK

4) Soient E et D deux points tels que :

* $E \in [CB)$ avec $HE = HA$
* $D \in [AH)\backslash[AH]$ avec $HD = HC$

a) Montrer que : $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HD})$

b) En déduire la position relative des droites (HK) et (ED)

5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC et L'application $f : P \to P$ / $M \longmapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$

a) Calculer $f(B)$ et $f(K)$

b) Montrer que pour tout point M du plan :

$f(M) = 3MG^2 + 22$

c) En déduire l'ensemble des points M du plan tel que : $f(M) = 28$

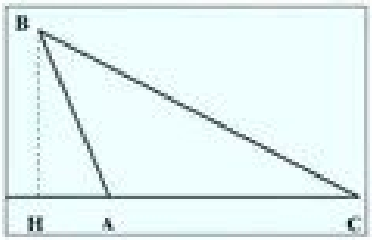
Exercice N°10 :

Dans la figure ci-contre :

On donne un triangle ABC

tel que :

$AB = 4$; $AC = 6$ et $BC = 2\sqrt{19}$



1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12$

b) En déduire $\cos(\widehat{BAC})$ et l'angle $\widehat{BAC}$

2) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC)

Calculer AH

3) Soit I le milieu de $[AC]$ et $\Gamma = \{M \in P / MA^2 + MC^2 = 36\}$.

Montrer que Γ est le cercle de diamètre $[AC]$

4) Soit $\Delta = \{M \in P / MA^2 - MC^2 = -60\}$

a) Vérifier que $B \in \Delta$

b) Montrer que $MA^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC}$

c) En déduire l'ensemble Δ

Exercice N°11 :

Soit $ABCD$ un triangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$

E le point tel que $C = D * E$

1) a) Montrer $AC = 2\sqrt{5}$

b) Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CE}$ et en déduire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$

2) Déterminer et construire l'ensemble :

$\zeta = \{M \in P / \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{ME} = -12\}$

3) Soit H et K les projetés orthogonales respectives des points A et C sur (BD)

a) Montrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = -12$

b) En déduire la distance HK

4) Le plan est rapporté à un ron $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On donne $A(2; 2)$; $B(6; 2)$; $C(6,0)$ et $D(2,0)$

a) Vérifier que $ABCD$; est un rectangle

b) Soit : $\Delta = \{M(x, y) / \overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AB} = 16\}$

i. Déterminer une équation cartésienne de Δ

ii. En déduire la position relative de Δ et ζ

Exercice N°12 :

1) On considère deux points A et B du plan tel que $AB = 2$ et $I = A * B$

a) Montrer que l'ensemble des points du plan tel que : $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB} = 0$ est la médiatrice de $[AB]$

b) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $(MA^2 + MB^2) = \frac{42}{5}$ est le cercle ζ de centre I et de rayon que l'on précisera

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

On donne les points : $A(1,-1)$; $B(1,3)$ et $J(0,1)$

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}$ et en déduire $\cos(\widehat{BAJ})$

b) Déterminer l'ensemble Δ des points $M(x,y)$ du plan tel que : $\overrightarrow{JM}.\vec{i}=0$

c) Soit la droite $D : x-2y+5=0$

i. Calculer $d(I,D)$

ii. En déduire que ζ et D sont tangent

d) Soit $D' : x+2y+1=0$ vérifier que D'est tangent à ζ et préciser le point de contact.

e) Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $d(M,D)=d'(M,D')$.

Exercice N°13 :

Dans l'annexe ci-contre ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB=a>0$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$

Soit G le centre de gravité du triangle ABC

Et A' le symétrique de A par rapport à (CJ)

1) On donne : $\zeta=\{M\in P \,/\, MA^2+MB^2+MC^2=2a^2\}$

a) Vérifier que $A\in\zeta$

b) Mq : $(\forall M\in P)$; $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{4}{3}a^2$

c) Déterminer et construire l'ensemble ζ

2) Déterminer et construire l'ensemble ζ' des point M tel que : $MA^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC}=0$

3) Déterminer l'intersection $\zeta'\cap\zeta$

4) Soient E et F les points du plan tels que :

$\overrightarrow{AE}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+(a^2+a-1)\overrightarrow{AC}$

Trouver le réel a pour que (IE) et (JE) soient Perpendiculaires

Exercice N°1 :

Soit ABC un triangle tel que :

$AC = 5$; $AB = 6$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{23\pi}{3}[2\pi]$

F est le milieu du segment $[AC]$

1) a) Déterminer la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ puis construire le triangle ABC

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

2) Soit ζ le cercle circonscrit au triangle ABC

On désigne par O son centre

La perpendiculaire à (AB) passant par C coupe (AB) en I et recoupe ζ en D

a) Donner une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$ puis de $(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IF}})$

b) Evaluer $(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IF}})$ et en déduire que : $(IF) \perp (BD)$

c) Définir l'ensemble Γ des points du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MF}}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et le construire

Exercice N°2 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{83\pi}{4}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{-79}{8}[2\pi]$

1) a) Déterminer les mesures principales des deux angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}})$

b) Construire $ABCD$

2) Montrer que $ABCD$ est un losange.

3) Soit E le point définit par :

$(\widehat{\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{13\pi}{2}[2\pi]$ et $DE = DA$

Montrer que les points A ; B et E sont lignés

4) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AE}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}})$.

Exercice N°3 :

A) Soit ABC un triangle du plan orienté dans le sens direct.

Déterminer et construire l'ensemble des points M dans chacun des cas suivants :

1) $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) $(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CB}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3) $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv -\frac{45\pi}{4}[2\pi]$

B) Soient A et B deux points distincts du plan orienté

Déterminer et construire les ensembles suivants :

1) $E = \left\{M \in P : (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]\right\}$;

2) $F = \left\{M \in P : (\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

Exercice N°4 :

$[AB]$ et $[CD]$ sont deux cordes perpendiculaires d'un cercle (C) du plan orienté dans le sens direct

On désigne par :

*) I le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

*) J le milieu du segment $[AD]$. (Voir figure ci-dessous)

1) a) Quelle est la nature du triangle JAI ?

b) En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JA}}\right) \equiv \pi - 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$.

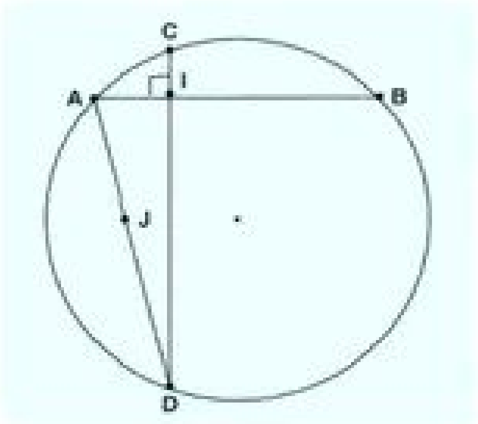
c) Montrer alors que $\left(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JD}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$.

d) Prouver que (IJ) et (BC) sont perpendiculaires

2) Déterminer puis construire l'ensemble des points tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{19\pi}{2}[2\pi]$

3) La droite (IJ) coupe (Γ) en un point K.

a) Montrer qu'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{KJ},\overrightarrow{KB}}\right) + k\pi$.



Exercice N°5 :

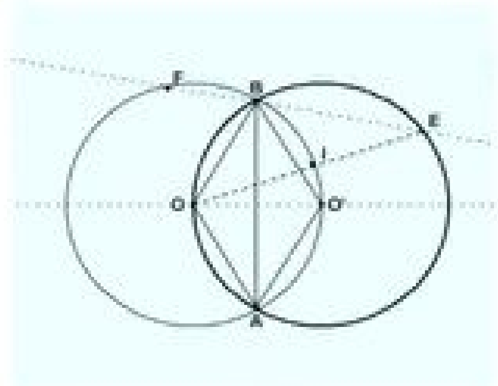
On considère :

*) un losange $OAO'B$ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

*) (ζ) le cercle de centre O et de rayon OA.

*) (ζ') le cercle de centre O' et de rayon $O'A$

*) E le point de l'arc orienté direct $\widehat{AB}$ du cercle (ζ') distinct de A et B



1) a) Déterminer la mesure principale de chacun des deux angles orientés : $\left(\widehat{\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'B}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{EB}}\right)$

b) Déterminer les deux ensembles :

$(E_1) = \left\{M \in P \ / \ \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{-\pi}{3}[2\pi]\right\}$

$(E_2) = \left\{M \in P \ / \ \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi]\right\}$

2) le cercle (ζ) et le segment $[OE]$ se coupent en I

a) Montrer que :

$$(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EA}})[2\pi] \text{ et que } (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BE}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BI}})[2\pi]$$

b) Déduire que I est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABE

3) La droite (BE) recoupe le cercle (ζ) en F

Montrer que $(EI) \perp (AF)$

Exercice N°6 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]$

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$

2) Soit D un point du plan tel que $\begin{cases} (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv -\frac{65\pi}{6}[2\pi] \\ AB = AD \end{cases}$

a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$

b) En déduire que A est le milieu du segment $[CD]$

3) a) Déterminer une mesure de l'angle orienté$(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}})$

b) En déduire que le triangle BCD esr rectangle en B

4) Soit C le cercle circonscrit au triangle BCD

a) Justifier que (ζ) est de centre A.

b) Soit E un point de (ζ) tel que $E \in \widehat{DB} \backslash \{B,D\}$

Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{ED}})$

5) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

6) Calculer en fonction de AB, $\det(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})$

Exercice N°7 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv -\frac{39\pi}{5}[2\pi]$

1) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ puis tracer le triangle ABC

2) Les bissectrices des secteurs $[AB,AC]$ et $[CA,CB]$ se coupent en O

Soit I le symétrique de O par rapport à la droite (BC)

Donner une mesure de chacun des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{IB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{OA}})$

3) La droite (BI) coupe la droite (AC) en D.

Montrer que le triangle BDC est isocèle.

4) Soient (ζ) le cercle circonscrit au triangle BCD

E le point diamétralement opposé à C sur (ζ)

F le point d'intersection de (BD) et (CE)

J le milieu du segment $[ED]$

a) Quelle est la nature de chacun des triangles : EFD et JFD ?

b) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{FJ},\overrightarrow{FD}}\right)$.

En déduire que les droites (AO) et (FJ) sont parallèles.

Exercice N°8 :

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que :

$\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

1) Donner la mesure principale de chacun des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

Soit (ζ) le cercle circonscrit au triangle ABC

On considère les ensembles suivants :

$(C_1) = \left\{M \in \mathcal{P};\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$

$(C_2) = \left\{M \in \mathcal{P};\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ et } MB < MC\right\}$

a) Vérifier que $A \in (C_1)$.

Déduire alors que les ensembles (C_1) et (C_2)

b) Soit D un point de (C_2). E et F les projetés orthogonaux respectifs de D sur (BC) et sur (AC)

Montrer que E ; F ; C et D appartiennent à un même cercle

c) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FD}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)[2\pi]$

3) Soit (ζ')le cercle de diamètre $[AD]$.

(ζ')recoupe la droite (AB) en G

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FG}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)[2\pi]$.

b) Montrer alors que les points E ; F et G sont alignés

Exercice N°9 :

Soient (ζ)un cercle de centre O.

$ABCD$ un quadrilatère inscrit dans le cercle (ζ)

1) a) Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right)$ en fonction de $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)$.

b) En déduire que les seuls parallélogrammes inscriptibles dans un cercle sont les rectangles

2) Le cercle (ζ') passant par A et D et tangent à (AB) en A

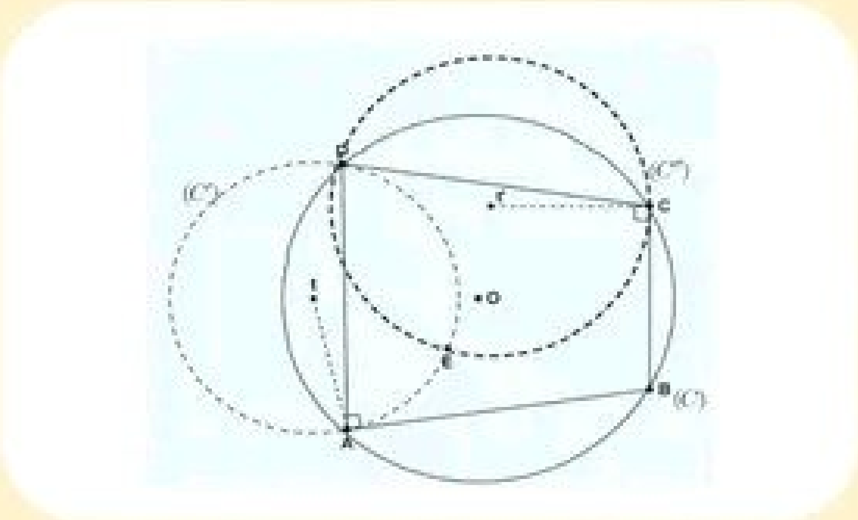
Le cercle (ζ'') passant par C et D et tangent à (CB) en C

(ζ') et (ζ'') se recoupent en E

Les points t et t' désignent les centres respectifs des cercles (ζ') et (ζ'')

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}}) + (\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB}}) \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})\,[2\pi]$

b) En déduire que les points A,C et E sont alignés



Exercice N°10 :

Dans la figure ci-dessous : (ζ) et (ζ') sont deux cercles de centres respectifs O et O', qui se coupent en A et B.

C et D sont deux points sur (ζ) et (ζ') respectivement tels que B,C et D soient alignés

Enfin, Γ est le cercle circonscrit au triangle AOO'

1) a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BO'},\overrightarrow{BO}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})\,[2\pi]$.

b) Montrer que $2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \equiv \pi + 2(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BO}})\,[2\pi]$

c) En déduire que $2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}})\,[2\pi]$

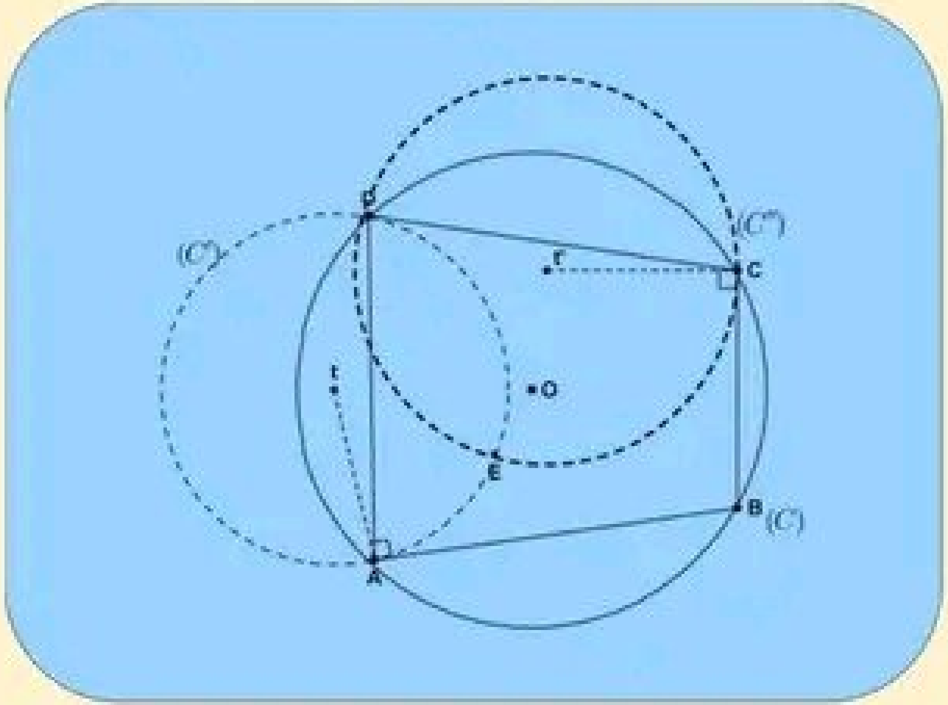
2) Les droites (OC) et $(O'D)$ se coupent en M.

On désigne C_1 le symétrique de C par rapport à O et par D_1 le symétrique de D par rapport à O'

a) Montrer que B ; C_1 et D_1 sont alignés

b) Montrer que $2(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MO'}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})\,[2\pi]$

3) Montrer que le point M appartient au cercle Γ



Exercice N°11 :

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle inscrit dans un cercle (ζ) de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv -\frac{77\pi}{9}[2\pi]$.

Voir figure dans ci-contre que l'on complètera progressivement.

1) Déterminer la mesure principale de :

$(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})$ et de $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$

2) Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en M.

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) + (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[2\pi]$.

Déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})[2\pi]$.

b) On suppose que A et B sont fixes, et que C et D varient sur l'arc orienté $\widehat{BA}$ privé de A et B

Déterminer l'ensemble des points M.

3) Soit (ζ_1) le cercle circonscrit au triangle OAB.

La parallèle à (BC) passant par M recoupe (ζ_1) en I

a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})$.

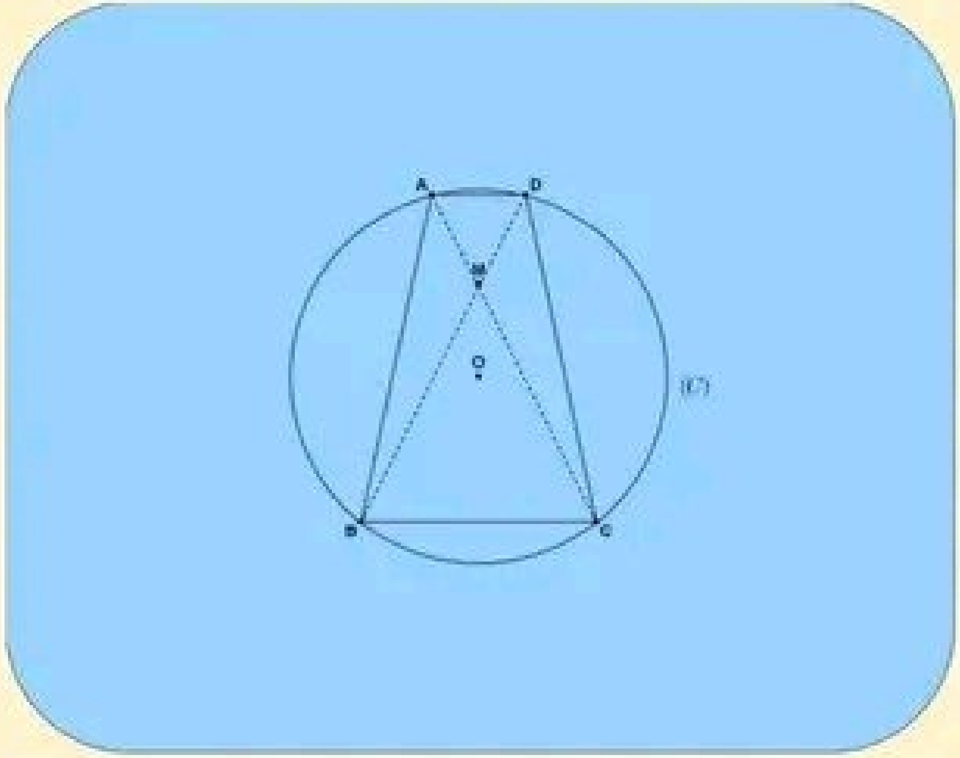
b) Justifier pourquoi a-t-on :

$(i)\ (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}})[2\pi]$?

$(ii)\ (\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}})[2\pi]$?

$(iii)\ (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}})[2\pi]$?

c) Déduire de (b) que la droite (AI) est tangente au cercle (C).



- Exercices d'entrainement

Exercice N°1 :

1) a) Montrer que $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

b) Déduire alors que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}$

2) Soit $f(x)=1+\cos(2x)+\sqrt{3}\sin(2x)$

a) Vérifier que $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\cos x\sin x$

b) Montrer alors que $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

c) Calculer de deux manières différentes $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$

En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice N°2 :

$x\in\mathbb{R}$ tel que $1-\cos x-\sin x\neq 0$ et $\sin x-\sin(2x)\neq 0$

1) Montrer que : $\frac{\sin x+\sin(2x)}{\sin x-\sin(2x)}=\frac{1+2\cos x}{1-2\cos x}$

2) Montrer que : $\frac{1+\cos x-\sin x}{1-\cos x-\sin x}=-\cot\left(\frac{x}{2}\right)$

3) Soit $A(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

a) Montrer que $A(x)=2\cos\left(2x-\frac{7\pi}{12}\right)$

b) Calculer $A(0)$ de deux manières différentes.

c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice N°3 :

Soit $f(x)=2+\sqrt{2}(\cos(2x)-\sin(2x))$

1) Transformer en $r\cos(2x-\varphi)$ l'expression : $\cos(2x)-\sin(2x)$.

2) Montrer alors que $f(x)=4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$.

3) Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, en déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice N°5 :

Soit $A(x)=\sqrt{3}\cos(3x)+\sin(3x)$.

1) Calculer $A\left(\frac{2\pi}{3}\right), A(7\pi)$ et $A\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

2) a) Montrer alors que $A(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$, l'équation $A(x)=\sqrt{3}$.

Exercice N°6 :

Soit $f(x)=\sin(2x)-2\sqrt{3}\sin^2 x$.

1) a) Montrer que $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

b) En déduire que $f(x)=4\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

2) Soit $g(x)=\cos(2x)-\frac{1}{2}$

a) Calculer $g\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

b) Montrer que $g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

c) En dédire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

- Equations et inéquations trigonométriques

Exercice N° 7 :

I) 1) Montrer que pour tout réel x :

$$\sin x-\cos x=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$$

2) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$: $\sin x-\cos x\geq 0$

3) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$: $(\sin x-\cos x)(1+\frac{1}{2}\sin 2x)\geq 0$

II) 1) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ puis dans IR

a) $\sin x+\cos x=0$; b) $2-\cos x<1$

c) $2\sin^2 x-\sin x-1=0$; d) $2\cos^2 x>1$

2) Résoudre dans $[0;2\pi[$: $2\cos(2x) - 2\sqrt{3}\sin(2x) = 2$

3) Résoudre dans $[0\,;2\pi[$:

a) $\cos(3x-\pi) < -\pi$; b) $\sin\left(-2x + \frac{2\pi}{5}\right) > \frac{3}{2}$

Exercice N°8 :

I) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

a) $4\cos^2 x - 3 = 0$; b) $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\tan^2 x = 3$

II) A l'aide du cercle trigonométrique sur lequel on représentera les solutions.

Résoudre les inéquations suivantes :

1) Dans $]-\pi;\pi]$:

a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$

2) Dans $[0;2\pi[$:

a) $\sin x < 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$

III) 1) Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$; b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Même question en donnant les solutions dans $[0;2\pi[$:

a) $\cos x \leq -1$; b) $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

Exercice N°9 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi[$

a) $\left(2\cos(2x) - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) = 0$

b) $\tan^2 x - \left(1 + \sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq 1$; d) $\left(\sqrt{2}\cos x - 1\right)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) \leq 0.$

Exercice N°10 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto 1 + \cos(2x) - \sin(2x)$

1) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $[0,\pi]$: $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$

2) On donne $g : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \frac{\sin(2x)-1}{1+\cos(2x)-\sin(2x)}$

a) Déterminer D_g : ensemble de définition de g

b) Résoudre dans $[0,\pi]$: $g(x) \geq 0$

3) a) Montrer que pour tout $x \in Dg$: $g(x) = \frac{1}{2}(\tan x - 1)$

b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

Exercice N°11 :

Le plan est mini d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soient $A\left(-\sqrt{3},-1\right)$ et $B(-1,-1)$

1) Déterminer les coordonnées polaires de A et B

2) Déterminer $\cos\widehat{AOB}$ et $\sin\widehat{AOB}$

3) Soit C le point de coordonnées polaires $\left(2,-\frac{2\pi}{3}\right)$

Déterminer les coordonnées cartésiennes de C

4) Déterminer la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{OA}}\right)$

Exercice N°1 : (Pilote)

1) Montrer que pour tous réels a et b :

$\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

2) Soit $A = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

a) Calculer $2A\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ puis déduire que $A = -\frac{1}{2}$

b) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation

$4x^2 - 2x - 1 = 0$. déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Exercice N°2 : (Pilote)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ rond. On considère les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$

Soit $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

On désigne par M. le point du cercle trigonométrique (ζ) tel que l'on ait $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}\right) \equiv 2\theta[2\pi]$

1) Montrer que $AM = 2\sin(\theta)$ et que $BM = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$

2) a) Montrer que pour tous réels a et b :

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$

b) En déduire que pour tous réels x et y :

$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

c) On désigne par K le point de (ζ); $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OK}}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

H le projeté orthogonal de K sur (OA).

Déterminer la valeur de θ pour que l'on ait :

$AM + BM = 4.HK$.

Exercice N°3 : (Pilote)

Soit $A(x) = \cos(4x) + 2\cos(2x) + 1$ où $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Vérifier que $A(x) = 2\cos^2(2x) + 2\cos(2x)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ puis dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $A(x) = 0$.

2) Soit $B(x) = \frac{\cos(2x).\cos(x)}{\cos^2(2x)+2\cos(2x)}$; où $x \in \mathbb{R}$

On désigne par E l'ensemble des réels x pour les quels $B(x)$ est définie

a) Montrer que $\forall x \in E, B(x) = \frac{1}{2.\cos(x)}$.

b) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, l'inéquation :

$B(x) \leq 2.\sin(x)$

Exercice N°4 : (Pilote)

1) Montrer que pour tous réel x ;

$\sin(x)\,(8\cos^3(x) - 4\cos(x)) = \sin(4x)$

2) Déduire que $8\cos^3\left(\frac{\pi}{5}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = 0$

3) a) Vérifier que $8x^3 - 4x - 1 = (2x+1)(4x^2 - 2x - 1)$

puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $8x^3 - 4x - 1 = 0$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Exercice N°5 : (Pilote)

On donne $(O,\vec{i},\vec{j})$ repère orthonormé direct

(ζ) est le cercle trigonométrique de centre O

M et N sont les points de (ζ) :

$(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi], (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. où $\theta \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soient E et F les points tels que :

$\overrightarrow{OE} = -\cos(\theta).\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OF} = \sin(\theta).\overrightarrow{ON}$.

1) a) Montrer que les coordonnées de E sont :

$(-\cos^2(\theta); -\cos(\theta).\sin(\theta))$

b) Montrer que les coordonnées de F sont :

$(-\sin^2(\theta); \cos(\theta)\sin(\theta))$

2) Soient A le point de corrdonnées $(-1;0)$

(Γ) le cercle diamètre $[OA]$

a) Montrer que E et F appartiennent à (Γ)

b) Construire dans l'annexe les points E et F

c) Montrer que la quadrilatère $OEAF$ est rectangle

d) Déterminer les réels θ pour lesquels $OEAF$ est un carré

Exercice N°6 : (Pilote)

Soit $g(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$; où $x \in \mathbb{R}$

1) Calculer $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $g\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$

2) Montrer que $g(x) = \sqrt{2}.\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0;\pi]$ l'équation $g(x) = 0$

4) Montrer que $g(x) = 2\sqrt{2}\cos(x).\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Déduire que $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $g(x) - \frac{\sqrt{6}}{2} \geq 0$

Exercice N°7 : (Pilote)

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{\sqrt{3}}{4}$

1) a) Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x).\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0;2\pi]$, l'équation

$4f(x) = (\sqrt{6}+\sqrt{2}).\cos(x)$

2) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{f(x)}{\cos(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Résoudre dans $[0;2\pi]$, l'équation $g(x) = \frac{1}{2}$

Exercice N°8 : (Pilote)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sin(4x)}{4\sin(x)}$

Déterminer D_f et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{1}{4}$

1) Montrer que pour tout $x\in D_f$ on a :

$f(x)=2\cos^3(x)-\cos(x)$.

2) a) Vérifier que $-\frac{1}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sont deux solutions de l'équation : $8x^3-4x-1=0$.

b) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0;2\pi]$ l'inéquation :

$$(1+\sqrt{5})\cos(2x)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\sin(2x)=2$$

Exercice N°9 : (Pilote)

1) a) Rappeler les formules de duplication de $\cos(2\alpha)$

b) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Ecrire $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)=\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

e) Résoudre dans $[0;2\pi]$ $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)\leq 1$

2) Soit $f(x)=\sin(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)-2\sin(x)+\sqrt{3}$

a) Montrer que pour tout réel x, on a :

$f(x)=2\sin(x)\left(\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)-1\right)$.

b) Etudier le signe de $f(x)$ sur $[0;2\pi]$ puis déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\leq 0$ dans l'intervalle $[0;2\pi]$

Exercice N°10 : (Pilote).

1) On pose $A(x)=\sqrt{2}\cos(2x)-\sqrt{2}\sin(2x), x\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}, A(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

b) Prouver que $A(x)=4\cos^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)-2$

En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0;2\pi[$, l'équation

$A(x)=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2) On considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB=4$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{63\pi}{4}[2\pi]$. (ζ) est le cercle de centre O et rayon r, est circonscrit à ABC

La droite perpendiculaire à (AB) en A, recoupe (C) en un point D

a) Calculer $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)$. Prouver que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

b) En déduire les valeurs de r et de $\det(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$.

c) Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC).

Déterminer la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}}\right)$

En déduire et représenter l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice N°1 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et de sens direct
On pose I le milieu du segment $[BC]$
Δ la droite perpendiculaire à $[BC]$ et passant par C. coupe (AB) en D
Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) a) Déterminer $R(B)$
   b) Déterminer $R\big((BC)\big)$ et $R\big((AC)\big)$. déduire $R(C)$
2) Caractériser RoR. déduire que A est le milieu du segment $[BD]$
3) Soit E le point tel que le triangle AEB est équilatéral direct
   a) Montrer qu'il existe une unique rotation R' transformant B en A et E en D
   b) préciser l'angle de R' et construire son centre Ω
4) Soit $M \in [BE]$ et $N \in [AD]$ tel que $BM = AN$
   Montrer que la médiatrice de $[MN]$ passe par un point fixe. préciser la nature du triangle ΩMN

Exercice N°2 :

Le plan est orienté dans le sens direct
Soit ABC un triangle équilatéral tel que :
$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et J le milieu du segment $[BC]$
Soit D le symétrique de A par rapport à (BC) et E symétrique de C par rapport à B
R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$

1) Montrer que $R(C) = B$ et $R(A) = E$
2) a) Construire les points E et I' images respectives de B et J par la rotation R
   b) Montrer que I' est le milieu de $[BF]$
   c) Soit G le point défini par $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BF}$. montrer que $R(E) = G$
3) Soit R' la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   montrer que $R'(A) = E$
4) Soit M un point du plan.
   On pose $R(M) = N$ et $R'(N) = M'$
   Montrer que I, M et M'sont alignés

Exercice N°3 :

On considère un parallélogramme $ABCD$ de sens direct

1) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
2) Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a) Quelle est l'image de A par r ?
   b) Montrer que $r(B) = E$
3) Soit A' le symétrique de A par rapport à r
   a) Justifier que $A' = r(D)$
   b) Montrer que $A'E = BD$ et que les droites $(A'E)$et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice N°4 :

Le plan est orienté dans le sens direct

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que :

$$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$$

1) Soit E un point de $[AB]$ et F un point de $[AC]$ tel que $AF = BE$
   a) Montrer qu'il existe une unique rotation r transformant A en B et F en E
   b) Montrer que $\frac{\pi}{3}$ est l'angle de cette rotation
   c) Montrer que le centre de r est le point O centre du cercle Γ circonscrit au triangle ABC
   d) Déduire $r(C)$
2) Soit D l'image de B par r.
   Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$
3) On désigne par r_1 la rotation réciproque de r.
   $P = S_A(B)$ et $Q = r_1(P)$
   a) Montrer que C est le milieu de $[AQ]$
   b) Montrer que le triangle AOQ est rectangle en O
4) Soit (ζ) le cercle de diamètre $[AQ]$ et (ζ') son image par r
   a) Montrer que P est un point de (ζ)
   b) Déterminer et construire le cercle (ζ')
   c) Soit M un point ξ distinct de P et N son image par r
   Montrer que M, N et P sont alignés

Exercice N°5 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral direct ABC de coté 4

On désigne par I ; J et K les milieux respectifs de $[AB]$; $[BC]$ et $[CA]$

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui envoie I en C et B en J
   b) Préciser l'angle de R et construire le centre de R
   c) Montrer que ;B, I et C sont situés sur un même cercle (ζ)
2) Soit B' le symétrique de I par rapport à B
   a) Montrer que $R^{-1}(B) = B'$
   b) Montrer que $(\Omega I')$ est tangente à ξ $I' = R^{-1}(I)$

Dans la suite on munit le plan du repère orthonormé direct $(A; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$

3) a) Déterminer les coordonnées polaires du point C
   En déduire ses coordonnées cartésiennes
   b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points I; J et K

4) Soit $f : P \to P$ / $M(x;y) \mapsto M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3}) \\ y' = \frac{1}{2}(-x\sqrt{3} + y + 4\sqrt{3}) \end{cases}$$

a) Montrer que f est une isométrie du plan

b) Vérifier que le point J est invariant par f

c) Soit $M(x;y)$ un point distinct de J et $M'(x';y')$ son image par f

Déterminer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{JM},\overrightarrow{JM'}}\right)$

d) Déduire la nature et les éléments Caractéristiques de f

5) Soit M un point variable du plan.

On pose $R(M) = M_1$ et $f(M) = M_2$

a) Démontrer que si M est distinct de J et de Ω alors on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{M\Omega},\overrightarrow{MJ}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2}}\right)$

b) En déduire le lieu géométrique du point M lorsque les points M ; M_1 et M_2 sont alignes.

Exercice n° 6 :

Dans le plan orienté P

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et de sens direct

On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par Δ la perpendiculaire à (BC) menée de C

Δ coupe (AB) en K

1) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer $R(B)$; $R((AC))$ et $R((BC))$

b) Déduire $R(C)$ et $R(I)$

2) On désigne par (ζ) cercle circonscrit au triangle ABC

a) Déterminer $(\zeta') = R(\zeta)$

b) Déterminer $(\zeta') \cap (\zeta)$

3) Soit M un point du plan tel que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$

a) Déterminer l'ensemble F des points M

b) On pose $R(M) = M'$; déterminer F' l'ensemble des points M' lorsque M décrit F

c) On Pose $R(I) = J$.

Montrer que $IM = JM'$ et $(BM) \perp (CM')$